1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL

Tipos de experimentos:

- Determinista: se puede predecir el resultado.

- Aleatorio: no se puede predecir el resultado que se va a obtener.

Conceptos:

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio.

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado estándar de 6 caras, el espacio muestral es:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

2. SUCESOS Y ÁLGEBRA DE SUCESOS

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral *E*.

2.1 TIPOS DE SUCESOS

➔ **Suceso Elemental**: formado por un único resultado del experimento (*Ej: "sacar un 4*).
➔ **Suceso Compuesto**: formado por dos o más resultados elementales (*Ej: "sacar un número par: {2, 4, 6}*).
➔ **Suceso Seguro**: aquel que siempre se cumple de manera inevitable.
➔ **Suceso Imposible ($\emptyset$)**: aquel que no puede ocurrir bajo ninguna circunstancia.
➔ **Sucesos Contrarios**: el suceso contrario de un suceso A es aquel que se verifica cuando no se cumple A.
➔ **Sucesos Incompatibles**: Dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden ocurrir al mismo tiempo.

2.2 OPERACIONES CON SUCESOS

➔ **Unión de Sucesos ($A \cup B$)**: cuando ocurre A, ocurre B, o ambos a la vez.
➔ **Intersección de Sucesos ($A \cap B$)**: se cumple únicamente cuando ocurren los sucesos A y B de forma simultánea.
➔ **Diferencia de Sucesos ($A - B$)**: ocurre el suceso A pero no ocurre el suceso B. $A - B = A \cap \overline{B}$

3. CONCEPTO Y ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Si repetimos un experimento aleatorio un número muy elevado de veces (n), la frecuencia relativa de un suceso A (cociente entre las veces que ocurre A y las veces totales que se ha hecho el experimento) tiende a estabilizarse en torno a un número fijo. Ese límite numérico es lo que definimos como la probabilidad del suceso, P(A).

3.1 DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

- **Axioma 1**: la probabilidad de cualquier suceso es siempre un valor positivo y menor o igual a uno. $0 \leq P(A) \leq 1$
- **Axioma 2**: la probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad $P(E) = 1$
- **Axioma 3**: si dos sucesos A y B son incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), entonces la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades individuales: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3.2 CONSECUENCIA DIRECTA DE LOS AXIOMAS

- Probabilidad del suceso contrario: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Probabilidad de la unión de tres sucesos: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA Y DEPENDENCIA

4.1 PROBABILIDAD CONDICIONADA

La **probabilidad condicionada** evalúa la posibilidad de que ocurra un suceso B sabiendo de antemano que ya ha ocurrido otro suceso A. La incorporación de esta información previa reduce el espacio muestral de análisis.

Se define matemáticamente como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{siempre que } P(A) > 0$$

De esta expresión se deriva la **Regla de la Multiplicación**, empleada para calcular la probabilidad de que ocurran dos sucesos simultáneamente:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

4.2 SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

- **Sucesos Independientes**: dos sucesos **A** y **B** son independientes cuando el hecho de que ocurra uno no altera en absoluto la probabilidad de que ocurra el otro.

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Sucesos Dependientes**: la probabilidad de uno se ve modificada por el resultado previo del otro.

5. HERRAMIENTA PRÁCTICA: TABLAS DE CONTINGENCIA

Son ideales para estructurar problemas en los que se cruzan dos variables o características distintas.

Ejemplo de Aplicación

Supongamos un estudio en una empresa con un total de **150 empleados**. Sabemos que **42 trabajadores acuden en vehículo privado** y los demás utilizan la ruta corporativa de la empresa. De los que se desplazan en coche privado, **20 son mujeres**. Por último, la plantilla total cuenta con **87 hombres**.

	R (Ruta)	$\overline{R}$ (Coche)	**Totales**
H (Hombre)	65	22	**87**
$\overline{H}$ (Mujer)	43	20	**63**
Totales	**108**	**42**	**150**

A partir de esta estructura, ya podemos calcular probabilidades.

- Probabilidad de elegir un hombre al azar:

  $$P(H) = \frac{87}{150} = \frac{29}{50}$$

- Probabilidad de seleccionar a alguien que use coche privado:

  $$P(\overline{R}) = \frac{42}{150} = \frac{7}{25}$$

- Probabilidad de seleccionar una mujer que viaje en la ruta:

  $$P(\overline{H} \cap R) = \frac{43}{150}$$

6. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA PROBABILIDAD

Para resolver problemas que se desarrollan en varias etapas, la mejor estrategia consiste en construir un **diagrama de árbol** y aplicar los dos teoremas clave de la probabilidad.

6.1 TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Si tenemos un sistema completo de sucesos ($A_1, A_2, \ldots, A_n$) que abarcan todo el espacio muestral, y ocurre un suceso cualquiera B que depende de ellos, la probabilidad global de que acontezca B se calcula sumando las probabilidades de todos los caminos que conducen a dicho suceso:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

6.2 TEOREMA DE BAYES

Se utiliza para calcular probabilidades a posteriori. Permite calcular la probabilidad de que el origen haya sido un suceso concreto A_i cuando ya sabemos con certeza que ha ocurrido el resultado final B.

Matemáticamente, relaciona la probabilidad condicionada inversa combinando la regla de la multiplicación y el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

En la práctica, no es obligatorio memorizar estas complejas fórmulas de manera rígida. Al dibujar el diagrama de árbol:

- Para la Probabilidad Total, se multiplican las ramas de cada camino válido y se suman los resultados de todos los caminos.
- Para el Teorema de Bayes, se coloca en el numerador el valor del camino específico que nos interesa, y en el denominador la probabilidad total (la suma de todos los caminos posibles analizados en el paso anterior).

7. CUADRO RESUMEN

PROBABILIDADES SIMPLES

$P(A)$	Probabilidad de A Que ocurre el evento A sin información adicional.	SIMPLE
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	Complemento de A Probabilidad de que NO ocurra el evento A.	SIMPLE

COMBINACIONES DE A Y B

$P(A \cap B)$	Intersección – A y B Que ocurren ambos eventos al mismo tiempo.	SIMPLE
$P(A \cup B)$	Unión – A o B Que ocurra el evento A, el evento B o ambos ($P(A) + P(B) - P(A \cap B)$).	SIMPLE

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$	A dado B Probabilidad de que ocurra A sabiendo que B ya ocurrió.	CONDICIONAL
$P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$	B dado A Probabilidad de que ocurra B sabiendo que A ya ocurrió.	CONDICIONAL
$P(\bar{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$	No-A dado B Complemento dentro de la condición B.	CONDICIONAL

CASOS ESPECIALES

$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$	Independencia Los eventos no se influyen mutuamente.	ESPECIAL
$P(A \cap B) = \varnothing$	Mutuamente excluyentes No pueden ocurrir a la vez (intersección vacía, probabilidad = 0).	ESPECIAL

CÓMO RECONOCER LA CONDICIONAL

⚠

- El enunciado dice "dado que", "si se sabe que" o "resulta que"
- La información reduce el grupo sobre el que calculas (universo restringido)
- Siempre necesitas la intersección y la probabilidad de la condición
- Si A y B son independientes: $P(A|B) = P(A)$ — la condición no cambia nada